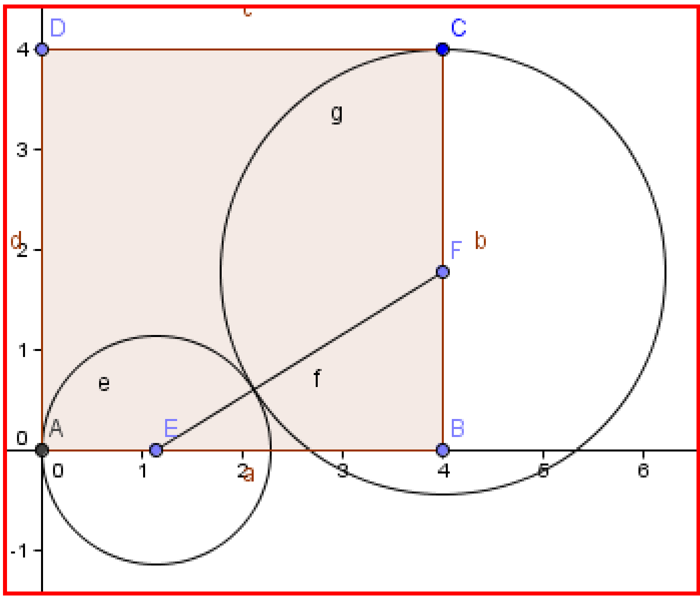
# Maturita 2010
# Prova di matematica
# PROBLEMA 1

Sia ABCD un quadrato di lato 1, P (E) un punto di AB e γ la circonferenza di centro P e raggio AP. Si prenda sul lato BC un punto Q (F) in modo che sia il centro di una circonferenza λ passante per C e tangente esternamente a γ.

***1.Se AP = x, si provi che il raggio di λ in funzione di x è dato da f(x) = (1-x)/(1+x)***




Non dobbiamo risolvere nulla, solo trovare la relazione che lega le due grandezze che ci interessano, ovvero i due raggi.

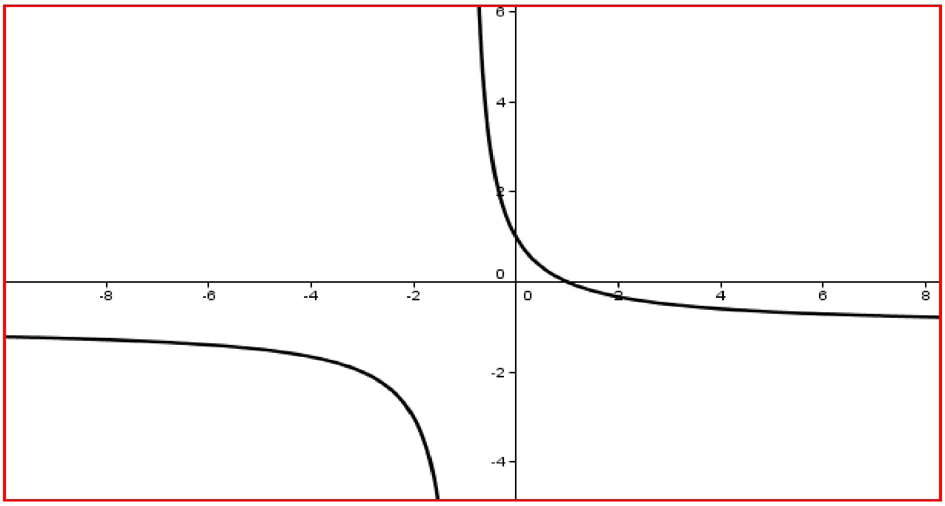
Chiamiamo x il raggio del cerchio di centro P e con f(x) o y, il raggio del cerchio di centro Q.

Consideriamo il triangolo QPB (da ora in poi FEB), notiamo che EB = 1-x, FB = 1-y, EF=x+y ed impostiamo il teorema di Pitagora

a $$(1-x)^2+(1-y)^2=(x+y)^2 \rightarrow 1+x^2-2x+1+y^2-2y=x^2+y^2+2xy$$

b $$1-x-y=xy \rightarrow y=\frac{1-x}{1+x}$$

2.***Riferito il piano ad un sistema di coordinate Oxy, si tracci, indipendentemente dalle limitazioni poste ad x dal problema geometrico, il grafico di f(x). La funzione f(x) è invertibile? Se sì, quale è il grafico della sua inversa?***



Con un po' di partenza potete ottenere anche voi un risultato simile a questo sopra. E' un'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti e traslata. E' quindi del tipo y= (ax+b)/(cx+d)

Essendo la funzione sia **iniettiva** (*Ogni elemento distinto dell'insieme A ha un immagine distinta nell'insieme B | Ad x diverse corrispondono y diverse*) che **suriettiva** (*quando l'insieme immagine corrisponde al codominio, ovvero quando ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento dell'insieme A*) essa è **biettiva,** o **biunivoca** (*Ad ogni elemento di A corrisponde un ed un solo elemento di B | Ad y diverse corrispondono x diverse*) e quindi invertibile.

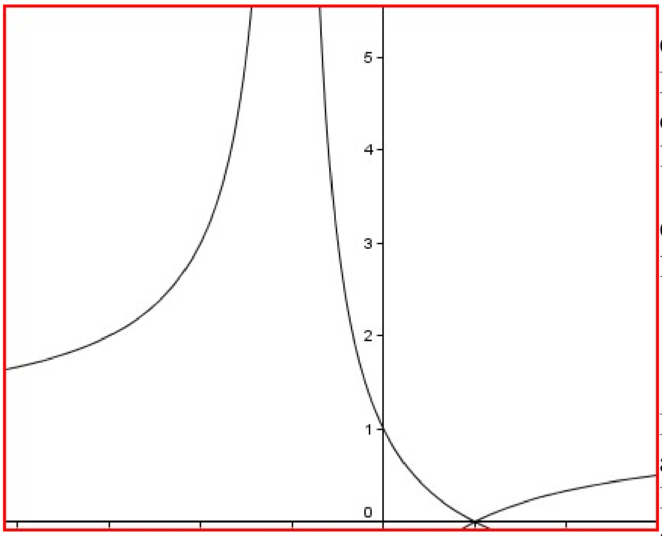
Ricaviamo x in funzione di y dall'equazione della funzione data e poi scambiamo le incognite per poter “ritornare” sul piano cartesiano di partenza. XOY (Per comodità riprendo da b)

$$x(y+1)=1-y \rightarrow x=\frac{(1-y)}{(1+y)}$$

Scambiamo le incognite ed abbiamo nuovamente la stessa funzione di partenza, che si dimostra essere l'inversa di sé stessa. Infatti è simmetrica rispetto alla bisettrice del I quadrante

**Da cui in poi, non possedendo ancora la formalità del calcolo di derivate ed integrali, la soluzione sarà certamente meno concisa di come dovrebbe essere.**

***3.Sia g(x) =|f(x)| , x ∈ R; quale è l’equazione della retta tangente al grafico di g(x) nel punto R (0, 1)? E nel punto S (1, 0)? Cosa si può dire della tangente al grafico di g(x) nel punto S ?***




Questo è il grafico di g(x)
Per trovare la tangente in R (0;1) ci serve il coefficiente angolare che è dato dal rapporto tra la variazione di x e quella di y.

Consideriamo dapprima l'iperbole non traslata e le variazioni (h) di x ed y in quel caso

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{x+h}}{x+h}=\frac{1}{(x+h)^2}$$

Possiamo dunque dire che in genere corrisponda ad -(1/X^2) .
Essendo la nostra iperbole traslata, la pendenza della tangente non cambia e, per semplificare i calcoli, posiamo calcolarla sull'iperbole simile riferita al centro delle assi. Il nostro punto (0;1) era prima ($2^{\wedge(1/2)}$, $1/2^{\wedge(1/2)}$) quindi applichiamo la derivata inserendo l'ascissa del punto. La tangente ha dunque coefficiente angolare -2x, e nel grafico della funziona traslata (quella data) ha equazione

y=2x-1

**Non esiste tangente nel punto (1;0)**, o meglio, **essendo un punto angoloso**, ve ne è una immediatamente a sinistra ed una immediatamente a destra del punto che si possono trovare con lo stesso procedimento usato sopra.

***4.Si calcoli l’area del triangolo mistilineo ROS, ove l’arco RS appartiene al grafico di f(x) o, indifferentemente, di g(x).***

Per calcolare questo si può seguire un procedimento analogo a quello adottato nel problema n°2